パターン認識のための数学的知識

山本 章博

2010 年 4 月 16 日

1　標本化定理と離散 Fourier 変換

　未知の関数 $f(\theta)$ が

$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi) \quad (\theta \in \mathbf{R}) \tag{1}$$

を満たしていると仮定する．区間 $[0, 2\pi)$ 内の等間隔の N 個のサンプル点

$$\theta_n = \frac{2\pi n}{N} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

において観測するとして，f の形が決定できる N を考えよう．

例 1 簡単な場合として，

$$f(\theta) \quad = \quad a + \sin(\theta + \phi)$$

を考える．正弦関数の加法定理より，位相のずれ ϕ は正弦と余弦の線形和

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\phi \ \cos\theta + \cos\phi \ \sin\theta$$

という形で表されるので，

$$f(\theta) \quad = \quad a + b\cos\theta + c\sin\theta$$

とおいて，a, b, c を決定すればよい．<u>したがって</u>$N \geq 3$ である．
　ここで，$N = 3$ として具体的 a, b, c を決定するには

$$\begin{pmatrix} f(\theta_0) \\ f(\theta_1) \\ f(\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

を解くことになる．

　関数 $f(\theta)$ が有限個の正弦波の和

$$f(\theta) \quad = \quad \sum_{k=0}^{K-1} \sin(k\theta + \phi_k)$$

として表されていると仮定し, 関数 $f(\theta)$ の値を等間隔に N 個のサンプル点 $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{N-1}$ で観測して $f(\theta)$ を決定することを考える．位相のずれ ϕ_k を用いる代わりに $a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$ という線形和を扱うことにすると

$$f(\theta) \quad = \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K-1} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{2}$$

と表して, a_k, b_k を決定することを考える．ここで, 定数項は便宜上 $\frac{a_0}{2}$ としている．上の例と全く同様の議論を用いれば, $N \geq 2K+1$ のときに決定可能である．その際，級数 (2) は θ_n と $f(\theta_n)$ を用いて表すことができる．このことを示す以下の定理は (離散 Fourier 変換に対する) **標本化定理** (sampling theorem) と呼ばれる．

定理 1 級数 *(2)* について $N \geq 2K+1$ のとき,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} f(\theta_n)\phi_N(\theta - \theta_n)$$

と表すことができる．ここで

$$\phi_N(\theta) \quad = \quad \frac{1 + 2\Sigma_{0<k<N/2} \cos k\theta}{N}$$

すなわち, 周期が $2\pi/K$ より大きな正弦波の合成であるような周期関数 $f(\theta)$ は等間隔で $N \geq 2K+1$ 個以上の点を測定することで決定することができる．周波数のことばでいえば, 周波数が K 以下の正弦波の合成であるような周期関数 $f(\theta)$ は等間隔で $N \geq 2K+1$ 以上の点を測定することで決定することができる．

例 1 において, 虚数単位 i を用いると

$$\begin{aligned} 1 &= \cos\theta_0 + i\sin\theta_0 = 1 + i0 \\ \omega &= \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 \\ \omega^2 &= \cos\theta_2 + i\sin\theta_2 \end{aligned}$$

とすると, 1, ω, ω^2 は 1 の相異なる 3 乗根であり,

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 = \cos\theta_2 &= \frac{\omega + \omega^2}{2} \\ \sin\theta_1 = -\sin\theta_2 &= \frac{\omega - \omega^2}{2i} \end{aligned}$$

であるから, $\sin\theta$, $\cos\theta$ の代わりに ω と ω^2 を用いて $2a$, b, c を決定することもできる．

一般に, 正の整数 N を固定したとき,

$$\omega = \cos\theta_1 + \sin\theta_1$$

とすれば, ω は **1 の原始 N 乗根**の条件

$$\omega^N = 1 \text{ かつ } \omega^n \neq 1 \ \ (n = 0, 1 \ldots, N-1)$$

を満たし,

$$\omega^0 = 1, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{N-1}$$

が 1 の相異なる N 乗根になる. なお,

$$\omega^k = \overline{\omega^{(N-k)}} = \omega^{-(N-k)}$$
$$\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^{N-1} = 0$$

である.

関数 f は (1) を満たす周期関数とする. 正の整数 N に対して, ω を 1 の原始 N 乗根とするとき,

$$\begin{pmatrix} f(\theta_0) \\ f(\theta_1) \\ f(\theta_2) \\ \cdots \\ f(\theta_{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ & & & \cdots & \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ \cdots \\ F(N-1) \end{pmatrix}$$

によって, 周波数 k の関数 $F(k)$ を定義する. 係数行列は正則なので, $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, ..., $F(N-1)$ は $f(\theta_0)$, $f(\theta_1)$, ...,$f(\theta_{N-1})$ の 1 次式で表すことができる. この F を f の**離散 Fourier 変換**とよぶ. 実際, 逆行列を用いると

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ \cdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{\omega} & \overline{\omega^2} & \cdots & \overline{\omega^{N-1}} \\ 1 & \overline{\omega^2} & \overline{\omega^4} & \cdots & \overline{\omega^{2(N-1)}} \\ & & & \cdots & \\ 1 & \overline{\omega^{N-1}} & \overline{\omega^{2(N-1)}} & \cdots & \overline{\omega^{(N-1)(N-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\theta_0) \\ f(\theta_1) \\ f(\theta_2) \\ \cdots \\ f(\theta_0) \end{pmatrix}$$

となる.

離散 Fourier 変換において, $|F(k)|^2 = F(k)\overline{F(k)} = F(k)F(N-k)$ が f の中での周波数 k の正弦波の強さを表している. また, 離散 Fourier 変換を用いると, 標本化定理の明快な証明が得られる. 特に $N = 2^K$ の場合には, 離散 Fourier 変換を高速に計算する手法である**高速 Fourier 変換 (FFT)** が考案されている.

なお, 離散ではない **Fourier 変換**は広義積分を用いて定義され, 複素解析による $Euler$**の公式**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\theta \in \mathbf{R})$$

を用いて見通しのよい理論が構築されている. 離散ではない Fourier 変換に対しても標本化定理が成立し, 標本化定理といえば普通はこちらを指す.

2 Bayes の定理

3 参考書

パターン認識に関する専門書を読むには, 数学的準備が必要である. フリーソフト・ウェアで認識プログラムを構築しながら学ぶための教科書としては以下のものがあり, 本講でも参考にした.

[1] 荒木 雅弘: “フリーソフトでつくる音声認識システム- パターン認識・機械学習の初歩から対話システムまで”, 森北出版, 2007.

本格的な教科書としては次のものをあげておく.

[2] 石井健一郎, 前田英作, 上田修功, 村瀬洋: “わかりやすいパターン認識”, オーム社, 2006.

本稿の離散 Fourier 変換の説明は直感的なものであるが, 数学理論の具体的な応用を見ることが数学を学ぶことの動機付けになると考え, 以下の書籍を参考に説明を行った.

[5] 金谷健一: “これなら分かる応用数学教室–最小二乗法からウェーブレットまで”, 共立出版, 2003.

計算機科学概論 (応用編)2010 年担当者

山本章博
情報学研究科 知能情報学専攻
研究室: 工学部 10 号館 4F 401 号室
Web: http://www.ist.i.kyoto-u.ac.jp/iip-yamamoto/index.html